ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1.σχολικό βιβλίο σελ.31

Α2.α)σχολικό βιβλίο σελ.65

β)σχολικό βιβλίο σελ.87

Α3. α)Λάθος β)Λάθος γ)Σωστό δ)Σωστό

Θέμα Β

Β1. Η f συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}\right)'\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+\left(5x\right)'+\left(\frac{1}{3}\right)'\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(x^3\right)'-3\left(x^2\right)'+5\left(x\right)'+0\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\left(3x^2\right)-3\left(2x\right)+5\cdot 1\Rightarrow f'(x)=x^2-6x+5, x\in R$$

Β2.

$f'(x)=0\Rightarrow x^2-6x+5=0\Rightarrow x=1$ ή $x=5$

$f'(x)>0\Rightarrow x^2-6x+5>0\Rightarrow x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$

$f'(x)<0\Rightarrow x^2-6x+5<0\Rightarrow x\in(1,5)$

x	$-\infty$ 1	5	$+\infty$
f′	+	−	+
f	↗	↘	↗

Συνεπώς
- f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και στο $[5,+\infty)$
- f γνησίως φθίνουσα στο [1,5]
- η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1, με τιμή f(1)= $\frac{8}{3}$
- η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 5, με τιμή f(5)= -8

Β3. Έστω ε: y=λx+β η εφαπτομένη της Cf στο Α(0,f(0)) λ=f'(0)=5, άρα ε: y=5x+β

A(0,f(0)) $\in \varepsilon \Rightarrow f(0)=5\cdot 0+\beta \Rightarrow \beta=\frac{1}{3}$, άρα ε:y=5x+ $\frac{1}{3}$

B4. Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)=(-1)^2-6(-1)+5=12$$

Θέμα Γ

Γ1. $s=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+7)(x-1)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+7}{2}=\frac{8}{2}=4$

Γ2. $cv=\frac{s}{\bar{x}}\Rightarrow 0.2=\frac{4}{\bar{x}}\Rightarrow \bar{x}=\frac{4}{0.2}\Rightarrow \bar{x}=20$

Γ3. $\bar{x}=\frac{1}{5}(22+18+20+\kappa+14+16)\Rightarrow 20=\frac{90+\kappa}{5}\Rightarrow 100=90+\kappa\Rightarrow \kappa=10$

Διάμεσος:

14,16,18,22,30

το δείγμα σε αύξουσα σειρά.

$$\delta=t_{\frac{5+1}{2}}=t_3=18$$

Γ4.

Έστω y_1,y_2,y_3,y_4,y_5 οι τιμές της θερμοκρασίας μετά την αύξηση κατά 10%

Συνεπώς ισχύει:

$$y_i=x_i+0.1x_i \text{ με } i=1,2,3,4,5 \Rightarrow y_i=1.1x_i$$

$$\text{άρα } s_y=s_x\cdot 1.1=4\cdot 1.1=4.4 \text{ και } \bar{y}=1.1\bar{x}=1.1\cdot 20=22$$

$$CV_y=\frac{s_y}{\bar{y}}=\frac{4.4}{22}=0.2 \text{ ή } 20\%$$

Θέμα Δ

Δ1. Από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $(AO)^2+(BO)^2=(AB)^2$

$(AO)^2+(BO)^2=(AB)^2 \Rightarrow x^2+y^2=100 \Rightarrow y^2=100-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{100-x^2}$,

όμως y> 0 αφού y μήκος, άρα

$y=\sqrt{100-x^2} \Rightarrow f(x)=\sqrt{100-x^2}$

Για το πεδίο ορισμού έχουμε:

- $100-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 \geq -100 \Leftrightarrow x^2 \leq 100 \Leftrightarrow |x| \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq x \leq 10$
- $y>0 \Leftrightarrow \sqrt{100-x^2}>0 \Leftrightarrow \sqrt{100-x^2} \neq 0 \Leftrightarrow 100-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 10$
- $x > 0$, αφού x μήκος πλευράς

Οπότε $A_f = (0,10)$

Δ2. Η f συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{100-x^2}}\left(100-x^2\right)'=\frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$$

Οπότε έχουμε:

$$f'(8)=\frac{-8}{\sqrt{100-64}}=\frac{-8}{6}=-\frac{4}{3}$$

Δ3.

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{100-x^2}-8\right)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2-8^2}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{100-x^2-64}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{36-x^2}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{-(x-6)(x+6)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{-(x+6)}{\sqrt{100-x^2}+8}=-\frac{12}{8+8}=-\frac{12}{16}=-\frac{3}{4}$$

Δ4. Από Δ2 έχουμε:

$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}<0$, για κάθε $x \in A_f$. Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_f.

$x_1 = 2.3$, $x_2 = 3.5$ και $x_3 = 2.8$, άρα θα έχουμε:

$$x_1<x_3<x_2 \quad \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} \quad f(x_1)>f(x_3)>f(x_2)$$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκε ο καθηγητής:
Σπύρος Σιταρίδης