Πανελλαδικές εξετάσεις Ημερησίων & Εσπερινών Γενικών Λυκείων
Εξεταζόμενο μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού
Τρίτη 4 Ιουνίου 2024
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 155

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α4.

α. ΣΩΣΤΟ
β. ΣΩΣΤΟ
γ. ΛΑΘΟΣ
δ. ΛΑΘΟΣ
ε. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

Πεδίο ορισμού:

- $x\in A_g\cap A_h \Rightarrow x\in[1,+\infty)$
- $h(x)\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\neq\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x}^2\neq 1 \overset{x\geq 1}{\Leftrightarrow} x\neq 1$

$A_f=(1,+\infty)$

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{x+1}{x-1}$$

$r(x)=g(x)\cdot h(x)$

Πεδίο ορισμού:

- $x\in A_g\cap A_h \Rightarrow x\in[1,+\infty)$

$A_r=[1,+\infty)$

$$r(x)=g(x)\cdot h(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=x-\frac{1}{x}$$

Β2.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα και συνεχής οπότε είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} (x+1)\frac{1}{x-1} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

Επομένως

f(A)=$(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)) = (1,+\infty) = A_{f^{-1}} = A_f$

Έστω

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow yx - y = x+1 \Rightarrow x(y-1) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

Οπότε $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Άρα $f^{-1}(x) = f(x)$ και $A_{f^{-1}} = A_f$

Τότε $f^{-1} = f$

Β3.

Η r είναι συνεχής ως ρητή στο $[1,+\infty)$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$\lim\limits_{x\to+\infty} r(x) = +\infty \notin \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(r(x) - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Άρα η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

Β4.

$(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$, x∈(1,+∞)

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{4(x^2-1)}{x} \overset{x\neq\pm1}{\Leftrightarrow} 1 = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x = 4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Εφόσον η f είναι συνεχής άρα θα είναι και συνεχής στο x=2

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2+4x-3+\lambda) = 1+\lambda$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(-2x+4+e^\lambda) = e^\lambda$
- $f(2) = e^\lambda$

Άρα $e^\lambda = 1+\lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$ εφόσον από γνωστή ανισότητα ισχύει

$e^x \geq x+1$ για κάθε $x\in \mathbf{R}$ με την ισότητα να ισχύει για x=0

Γ2.

Για λ=0 έχουμε $f(x) = \begin{cases} -2x+5, & 0\leq x<2 \\ -x^2+4x-3, & x\geq 2 \end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα (0,2) και (2,+∞) ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & 0\leq x<2 \\ -2x+4, & x>2 \end{cases}$$

Βλέπουμε πως $f'(x)<0$ σε κάθε περίπτωση και εφόσον η f είναι και συνεχής θα είναι γν. φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

$$\text{για κάθε } x\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\leq f(0) \Leftrightarrow f(x)\leq 5$$

Άρα η f παρουσιάζει στο 0, ολικό μέγιστο το f(0)=5

Γ3.

i)

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2x+5-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2(x-2)}{x-2} = -2$
- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x^2+4x-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-(x-2)^2}{x-2} = 0$

Εφόσον $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2 Άρα δεν ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [0,3]

ii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΔΕ είναι ίσος με

$$\lambda = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = -\frac{5}{3}$$

Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει ξ∈(0,3) τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = -\dfrac{5}{3}$

- Για $0<\xi<2$:

$$f'(\xi) = -2 \neq -\frac{5}{3}$$

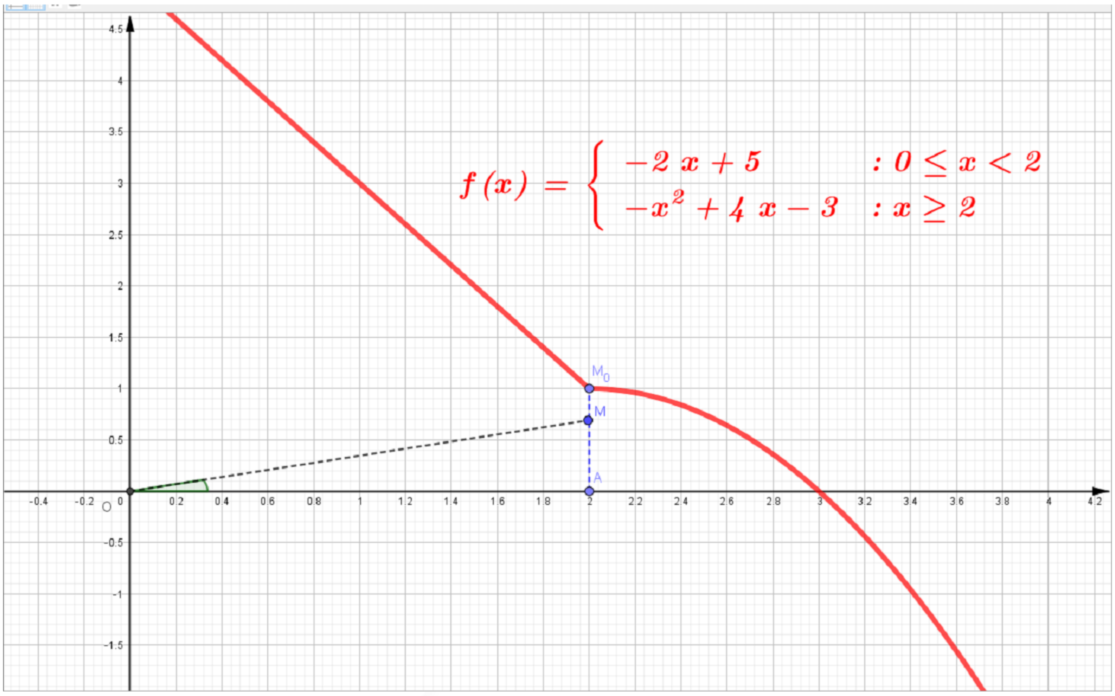
- Για $2 < \xi < 3$:

  $$f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6} \in (2,3]$$

  Οπότε $\xi = \frac{17}{6}$

Γ4.

Για $x \geq 2: f(x) = -x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 4x - 4 + 1 = -(x-2)^2 + 1$



Έστω M(2,y) και για την χρονική στιγμή t ισχύουν

$$y = y(t), y'(t) = 0.5$$

Στο τρίγωνο ΟΑΜ θα ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{AM}{AO} = \frac{y}{2}$, επομένως

$$\varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{y(t)}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \quad (1)$$

- $\sigma\upsilon\nu\omega(t_0) = \frac{MA}{OM} = \frac{2}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Οπότε τελικά έχουμε:

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{\frac{4}{5}} \cdot \omega'(t_o) = \frac{0,5}{2} \Rightarrow \frac{5}{4}\omega'(t_o) = \frac{1}{4} \Rightarrow \omega'(t_0) = \frac{1}{5} \text{ rad/sec.}$$

ΘΕΜΑ Δ

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\ln x+\alpha x}{x}=\frac{\ln x}{x}+\alpha$

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

- $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$
- $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}>\Leftrightarrow 1-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}<0\Leftrightarrow 1-\ln x<0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow x>e$

x	0	e	+∞
f’	+	–	
f	↗	↘	

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x = e το f(e)=$\frac{1}{e}+\alpha$.

Από το σύνολο τιμών της συνάρτησης αντιλαμβανόμαστε ότι το μέγιστο της συνάρτησης είναι ο αριθμός 1 + $\frac{1}{e}$. Άρα έχουμε:

$$f(e)=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow\alpha+\frac{1}{e}=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow\alpha=1$$

Άρα $f(x)=\frac{\ln x}{x}+1$.

Δ2.

Η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1=\frac{-\ln 2}{\frac{1}{2}}+1=-2\ln 2+1=\ln\frac{e}{4}<0$, αφού $\frac{e}{4}<1\Leftrightarrow\ln\frac{e}{4}<0$
- $f(1)=1$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(0,e]$ ($\left(\frac{1}{2},1\right)\subseteq\Delta_1$) οπότε το παραπάνω x_o είναι μοναδική ρίζα της f στο Δ_1.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = (e,+\infty)$ με:

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\lim_{x\to e} f(x)\right)=\left(1,1+\frac{1}{e}\right),\text{αφού}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)\overset{DLH}{=}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=1$$

- $0\notin f(\Delta_2)$, οπότε η f δεν έχει ρίζα στο Δ_2.

Οπότε το παραπάνω x_o είναι μοναδικό.

Δ3.

(i) $f(x) = f(4)$ **(1)**

- $f(2)=\frac{\ln 2}{2}+1$
- $f(4)=\frac{\ln 4}{4}+1=\frac{2\ln 2}{4}+1=\frac{\ln 2}{2}+1=f(2)$

Έστω $h(x) = f(x) - f(4)$, $A_h = (0,+\infty)$
Παρατηρώ ότι $h(2) = h(4) = 0$, οπότε το $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$ αποτελούν λύση της ζητούμενης εξίσωσης.

- Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $h'(x) = f'(x)$, οπότε η μονοτονία της συνάρτησης h είναι ίδια με την μονοτονία της συνάρτησης f που υπολογίσαμε στο ερώτημα Δ_1.
- $2\in\Delta_1 = (0,e]$ οπότε το $x_1 = 2$ είναι η μοναδική ρίζα της **(1)** στο Δ_1
- $4\in\Delta_2 = (e,+\infty)$ οπότε το $x_2 = 4$ είναι η μοναδική ρίζα της **(1)** στο Δ_2

Οπότε το $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$ είναι οι μοναδικές λύσεις της ζητούμενης εξίσωσης.

(ii)

$$2^x\le x^2\Leftrightarrow \ln 2^x\le \ln x^2\Leftrightarrow x\ln 2\le 2\ln x\overset{x>0,\ln 2>0}{\Leftrightarrow}\frac{\ln 2}{2}\le\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow g(x)\ge 0\ \textbf{(2)}$$

- Αν $x\in(0,e]$ έχουμε:

  $(2)\Rightarrow g(x)\ge g(2)\overset{g\,\gamma\nu.\,\text{αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x\ge 2$
- Αν $x\in(e,+\infty)$ έχουμε:

  $(2)\Rightarrow g(x)\ge g(4)\overset{g\,\gamma\nu.\,\text{φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} x\le 4$
- Τελικά $x\in[2,4]$

Δ4.

Το ζητούμενο εμβαδόν δίνετε από τη σχέση:

$$E=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|\,dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f(e^x)\frac{1-x}{e^x}\right|dx$$

έστω $\kappa = e^x \Rightarrow x=\ln\kappa\Rightarrow dx=\frac{1}{\kappa}d\kappa$, $x_1=-\ln 2:\kappa_1=\frac{1}{2}$ $\quad x_2=0:\kappa_2=1$

Οπότε έχουμε:

$$E=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(\kappa)\frac{1-e^{\kappa}}{\kappa}|\frac{1}{\kappa}d\kappa\overset{\kappa>0}{=}\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(\kappa)\frac{1-e^{\kappa}}{\kappa^2}|d\kappa=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(\kappa)f'(\kappa)|d\kappa$$

- $f'(\kappa)>0$, για κάθε $\kappa\in\left[\frac{1}{2},1\right]$
- Για το πρόσημο της f θα δουλέψουμε με περιπτώσεις:
  - ✓ $\frac{1}{2}\le\kappa\le x_o \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{2}\right)\le f(\kappa)\le f(x_o)\Leftrightarrow \ln\frac{e}{4}\le f(\kappa)\le 0$
  - ✓ $x_o\le\kappa\le 1 \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} f(x_o)\le f(\kappa)\le f(1)\Leftrightarrow 0\le f(\kappa)\le 1$

Άρα για το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$E=-\int_{\frac{1}{2}}^{x_o}f(\kappa)f'(\kappa)d\kappa+\int_{x_o}^{1}f(\kappa)f'(\kappa)d\kappa=\left[-\frac{1}{2}f^2(\kappa)\right]_{\frac{1}{2}}^{x_o}+\left[\frac{1}{2}f^2(\kappa)\right]_{x_o}^{1}=$$

$$-\frac{1}{2}f^2(x_o)+\frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f^2(1)-\frac{1}{2}f^2(x_o)=\frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f^2(1)$$

$$=\frac{1}{2}(-2\ln 2+1)^2+\frac{1}{2}=\frac{(-2\ln 2+1)^2+1}{2}\ \tau.\mu.$$

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:
Γαυγιωτάκης Αργύρης
Παπαθανασίου Νίκος
Σιταρίδης Σπύρος