# Πανελλαδικές Εξετάσεις
# Ημερησίων & Εσπερινών Γενικών Λυκείων
# Τρίτη 6 Ιουνίου 2023
# Εξεταζόμενο Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού
# Απαντήσεις

## Θέμα Α

**Α1.** Σχολικό Βιβλίο σελίδα 111.

**Α2.** Σχολικό Βιβλίο σελίδα 104.

**Α3.** Σχολικό Βιβλίο σελίδα 128.

**Α4.**

1. Λάθος
2. Λάθος
3. Λάθος
4. Σωστό
5. Σωστό

## Θέμα Β

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$, $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, h(x)=\ln x$, $x\in\mathbb{R}$ (1)

**Β1.**

- ✓ $x\in A_h$: $x>0$
- ✓ $h(x)\in A_g$: $h(x)\in\mathbb{R}$

Οπότε $A_f=(0,+\infty)$

$$f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=\frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\frac{4-e^{\ln x^2}}{x}=\frac{4-x^2}{x}$$

**Β2.** (i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=\frac{-2x\cdot x-\left(4-x^2\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{-x^2-4}{x^2}<0,\ \text{για κάθε } x\in A_f$$

Οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $A_f$.

(ii) $$\pi>e\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(\pi)<f(e)\Leftrightarrow\frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e}\Leftrightarrow\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}$$

**Β3.** Κατακόρυφη:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(4-x^2\right)\cdot\frac{1}{x} = +\infty$$

Οπότε η $C_f$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την x = 0

Πλάγια ασύμπτωτη:

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = -1$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$

Άρα η ευθεία y = -x είναι πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο +∞

**Β4.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(x^2+1)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sigma\upsilon\nu(x^2+1)\right)\frac{1}{f(x)}$$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{4-x^2} = 0$

$$\left|\sigma\upsilon\nu(x^2+1)\frac{1}{f(x)}\right| \le \left|\frac{1}{f(x)}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{1}{f(x)}\right| \le \sigma\upsilon\nu(x^2+1)\frac{1}{f(x)} \le \left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{f(x)}\right| = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right) = 0$

Οπότε από κριτήριο παρεμβολής: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sigma\upsilon\nu(x^2+1)\right)\frac{1}{f(x)} = 0$

## Θέμα Γ

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}+a, & x\ge 1 \end{cases}$$

**Γ1.**

$$\int_2^3 xf(x)dx = \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+a\right)dx = \int_2^3 (1+ax)dx = \left[x+\frac{1}{2}a\chi^2\right]_2^3 = 1+\frac{5}{2}a$$

Άρα $1+\frac{5}{2}a = 1 \Rightarrow \alpha = 0$

Άρα

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}, & x\ge 1 \end{cases}$$

**Γ2.**

(i) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x-2)=-1$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{-x}=-1$$

Άρα εφόσον $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ η f είναι παραγωγισιμη στο 1 αρα οριζεται και η εφαπτομενη στο σημειο αυτό.

(ii) Η εξισωση της εφαπτομενης στο 1 θα είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-1(x-1)\Leftrightarrow y=-x+2$

Για την γωνία ω μεταξυ της ευθείας και του άξονα χ'χ ισχύει εφω=-1 αρα ω=$135^0$

**Γ3.** Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο 1 άρα ισχύει

$$f'(x)=\begin{cases}2x-3, & x<1\\ \frac{-1}{x^2}, & x\geq 1\end{cases}$$

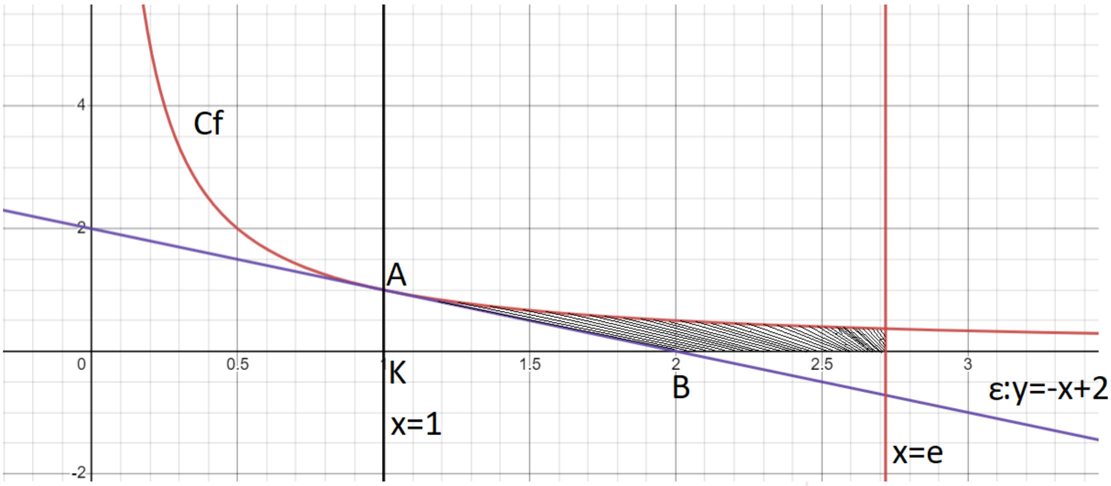
Για κάθε χ<1 ισχύει $f'(x)<0$
Για κάθε χ>1 ισχύει $f'(x)<0$ επισης άρα σε κάθε περιπτωση $f'(x)<0$ αρα εφοσον η f είναι συνεχης θα είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1.

Η f γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε

$$f(R)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$$

Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

**Γ4.**




Για το γραμμοσκιασμενο εμβαδο του χωριου Ω θα ισχυει

$$E(\Omega)=\int_1^e f(x)dx-(AKB)$$

$$=\int_1^e \frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}=[lnx]_1^e-\frac{1}{2}=(lne-ln1)-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\text{τετ. μονάδες}$$

## <u>Θέμα Δ</u>

$f:(0,2)\to\mathbb{R}$

$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa,\kappa\in\mathbb{R}$

**Δ1.** Η f συνεχής στο $x_o$ = 1, οπότε $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

Έστω $\varphi(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}$,με $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=\ell$, ορισμένη κοντά στο 1.

$\varphi(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}\Rightarrow f(x)=\varphi(x)(x-1)+2x\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}[\varphi(x)(x-1)+2x]\Rightarrow$

$f(1)=2\Rightarrow\ln1-1+\kappa=2\Rightarrow\kappa=3$

**Δ2.** $f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3$

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη με:

- $f'(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}=\frac{(x+2)(x-1)}{x^2(x-2)}$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow x<1$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

| x | 0       1 | 2 |
|---|---|---|
| f'(x) | + | − |
| f(x) | ↗ | ↘ |

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (0,1)$, οπότε:

$$f(\Delta_1) = (\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x)) = (-\infty, 2)$$

- $0 \in f(\Delta_1)$, οπότε υπάρχει μοναδικό (f γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1$) $x_1 \epsilon \Delta_1$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [1,2)$, οπότε:

$$f(\Delta_2) = (\lim_{x\to 2^-} f(x), f(1)] = (-\infty, 2]$$

- $0 \in f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικό (f γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2$) $x_2 \epsilon \Delta_2$, τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$

Τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1 < 1 < x_2$.

Έστω:

$$x_1 \geq \frac{1}{3} \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 \geq \ln\frac{5}{3}, \text{άτοπο}$$

Άρα $x_1 < \frac{1}{3}$

**Δ3.** Αρκεί ν.δ.ο. υπάρχει $\xi \epsilon (0,1)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

✓ Η f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

✓ Η παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$

Από θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \epsilon \left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$f''(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{2}{x^3} < 0, \text{για κάθε } x \in (0,1)$, οπότε f' γνησίως φθίνουσα στο (0,1), άρα το παραπάνω ξ είναι και μοναδικό.

**Δ4.** $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(x)$

(i) Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$F'(x) = G'(x)$$

F και G συνεχείς συναρτήσεις
Οπότε από πόρισμα του ΘΜΤ: $F(x) = G(x) + c,\ c\in\mathbb{R}$
Για $x = x_1$: $0 = G(x_1) + c$ **(1)**
Για $x = x_2$: $F(x_2) = 0 + c \Leftrightarrow F(x_2) = c$ **(2)**
(1) – (2): $G(x_1) + F(x_2) = 0$

(ii) Έστω $g(x) = x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x$, για κάθε $x \in [x_1, x_2]$

Για κάθε $x \in (x_1, x_2)$:

$x_1<x<x_2 \Rightarrow x_1<x<1 \Rightarrow 0<f(x)$
$x_1<x<x_2 \Rightarrow 1<x<x_2 \Rightarrow f(x)>0$

άρα έχουμε $f(x)>0 \Rightarrow F'(x)>0$ άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$

Για την g ισχύει ότι είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ με

$g(x_1) = x_1F(x_1) + x_2G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = x_2G(x_1) + x_1 - x_2 = -x_2F(x_2) + x_1 - x_2 < 0$, αφού

- ✓ $x_2>0 \Rightarrow -x_2<0$
- ✓ $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow F(x_2) > 0$
- ✓ $x_1 - x_2 < 0$

$g(x_2) = x_1F(x_2) + x_2G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$

- ✓ $x_1>0$
- ✓ $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow F(x_2) > 0$
- ✓ $x_2 - x_1 > 0$

άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$.

Η g είναι παραγωγισιμη με
$g'(x) = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 = f(x)(x_1+x_2) + 2 > 0$
Για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα οπότε το $x_0$ είναι μοναδικό.

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές:
Αργύρης Γαυγιωτάκης
Νίκος Παπαθανασίου
Σπύρος Σιταρίδης