Πανελλαδικές Εξετάσεις
Ημερησίων & Εσπερινών Γενικών Λυκείων
Τετάρτη: 6 Ιουνίου 2022
Εξεταζόμενο Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού
Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1.Σχολικό Βιβλίο σελίδα 186.

Α2.Σχολικό Βιβλίο σελίδα 142.

Α3.Σχολικό Βιβλίο σελίδα 161.

Α4.

α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Λάθος

Θέμα Β

$f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$

$f(x)=(x^2-1)^2$

$g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$g(x)=\sqrt{x}$

Β1.

- $x\in A_g : x\geq 0$
- $g(x)\in A_f : g(x)\leq 1 \Rightarrow \sqrt{x}\leq 1 \Rightarrow x\leq 1$
- $A_{f\circ g}=[0,1]$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x}^2-1)^2=(x-1)^2$

Β2. $h(x)=(x-1)^2$

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $h'(x)=2(x-1)\leq 0\ \forall x\in A_h$.

Οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο A_h και 1-1.

Η h είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι της μορφής:

$h(A_h) = [f(1), f(0)] = [0,1] = A_{h^{-1}}$

Έστω $y = h(x) \Rightarrow y = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |x-1| \Rightarrow -\sqrt{y} = x - 1 \Rightarrow x = 1-\sqrt{y}$

Άρα $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x},\ x \in [0,1]$

B3.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$$

i. φ συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

- $\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} = \varphi(1)$

  Άρα φ συνεχής και στο $x_0 = 1$, άρα και στο $[0,1]$.

- $\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \varphi(0) \neq \varphi(1)$

  Οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Ε.Τ στο $[0,1]$

ii. $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \xRightarrow{\eta\mu x \uparrow \text{ στο } \left[0,\frac{\pi}{2}\right)} \eta\mu\dfrac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1 \Rightarrow \varphi(1) < \eta\mu\alpha < \varphi(0)$

Οπότε από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) =$ ημα.

Θέμα Γ

f(0)= 0

Γ1.

- Για x <-1 :
  $f'(x) = -2 \Rightarrow (f(x))' = (-2x)'$
  - f συνεχής
  - -2x συνεχής

  } από πόρισμα του ΘΜΤ: $f(x) = -2x + c_1,\ c \in \mathbb{R}$

- Για x > -1:
  $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow (f(x))' = (x^3 - x)'$
  - f συνεχής
  - x^3 -x συνεχής

  } από πόρισμα του ΘΜΤ: $f(x) = x3 - x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$

  $\xRightarrow{x=0} f(0) = c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

Οπότε: $f(x)=\begin{cases} -2x+c_1, & x<-1 \\ c, & x=-1 \\ x^3-x, & x>-1 \end{cases}$

- Η f είναι συνεχής στο -1, οπότε:
  - $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$
  - $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0$
  - $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=0 \Rightarrow 2+c_1=0 \Rightarrow c_1=-2$
  - c =0

Άρα $f(x)=\begin{cases} -2x-2, & x\le -1 \\ x^3-x, & x>-1 \end{cases}$

Γ2. Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι:

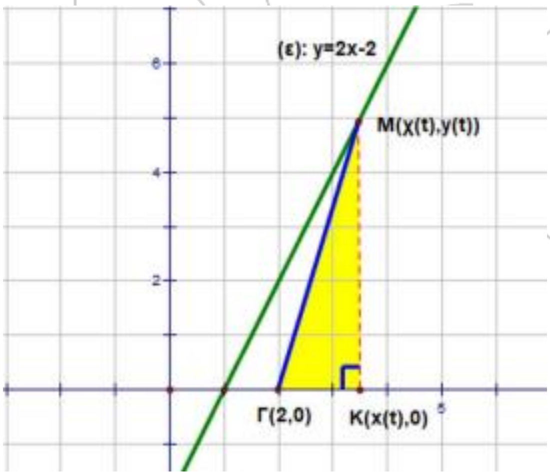
$$\varepsilon: y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$$

$B(0,-2)\in \varepsilon$:

$$-2-f(x_o)=f'(x_o)(-x_o)\Leftrightarrow$$
$$-2-x_o^3+x_o=(3x_o^2-1)(-x_o)\Rightarrow$$
$$-2-x_o^3+x_o=-3x_o^3+x_o\Rightarrow$$
$$2x_o^3-2=0\Rightarrow x_o=1$$

Άρα ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=2x-2$

Γ3.



Έστω M(x(t),y(t)) το σημείο της εφαπτομένης και K(x(t),0) η προβολή του στον άξονα x’x. Έχουμε ότι:
$x(t_o)=3$, $y(t_o)=4$ και $x'(t)=2$μον/sec

$y(t)=2x(t)-2 \Rightarrow y'(t)=2x'(t)\Rightarrow y'(t)=4$ μ/s

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ έχουμε:

$$E(t)=\frac{\Gamma K\cdot MK}{2}=\frac{\left(x(t)-2\right)y(t)}{2}\Rightarrow$$

$$E(t)=\frac{1}{2}\left(x(t)-2\right)y(t)$$

$$\Rightarrow E'(t)=\frac{1}{2}x'(t)y(t)+\frac{1}{2}x(t)y'(t)\text{ - }y'(t)\overset{t=t_0}{\Rightarrow} E'(t_0)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4-4\Rightarrow$$

$E'(t_0)=4+6-4\Rightarrow E'(t_0)=6\ \mu ov^2/\sec.$

Γ4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

  κ= f(x) $\Rightarrow$ κ= -2x -2

  κ $\to$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

  $\lim\limits_{\kappa\to+\infty}\frac{\eta\mu\kappa}{\kappa}\overset{\kappa.\pi.}{=}0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{1-x^3}\overset{\substack{\kappa=-x\\ \kappa\to+\infty}}{=}\lim\limits_{\kappa\to+\infty}\frac{f(\kappa)}{1+\kappa^3}=\lim\limits_{\kappa\to+\infty}\frac{\kappa^3-\kappa}{\kappa^3+1}=\lim\limits_{\kappa\to+\infty}\frac{\kappa^3}{\kappa^3}=1$

  Οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=1$

<u>Θέμα Δ</u>

f: $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

f(x) = x- ln(3x)

Δ1.

i. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$f'(x)=1-\frac{1}{3x}\cdot 3=\frac{x-1}{x}$

x	0	1	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	↘		↗

ο.ε

f(1) = 1- ln3

- Δ_1= (0,1)

  f (Δ_1) = $\left(\lim\limits_{x\to1}f(x),\lim\limits_{x\to0}f(x)\right)=(1-\ln3,+\infty)$

  1-ln3 < 0 άρα $0\in f(\Delta1)$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο ώστε f(x_1) = 0 και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ_1 το x_1 είναι μοναδικό.

- Δ_2= $[1,+\infty)$

  f(Δ_2) = $\left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [1-\ln 3, +\infty)$, αφού

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln 3x}{x}\right) = +\infty$

  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln 3x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
  - $0 \in f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε f(x_2) = 0 και επειδή f γνησίως μονότονη στο Δ_2 το x_2 είναι μοναδικό.

Άρα η f(x)= 0 έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1 < 1 < x_2$.

ii. Η f' είναι συνεχής και με παραγωγίσιμη με:

$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \ \forall\ x \in A_f$.

Οπότε η f είναι κυρτή στο A_f.

Δ2. $E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx$

- $x_1 < x < 1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x) > f(1) \Rightarrow 0 > f(x)$
- $1 < x < x_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(1) < f(x) < f(x_\varepsilon) \Rightarrow f(x) < 0$

  Άρα f(x) < 0.

Από ερώτημα Δ_1 γνωρίζουμε ότι:

- $f(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = \ln 3x_1$
- $f(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = \ln 3x_2$

Οπότε

$$E = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} x - \ln 3x\,dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \ln 3x\,dx = -\left(\frac{x_2^{\ 2}}{2} - \frac{x_1^{\ 2}}{2}\right) + [x\ln 3x]_{x_1}^{x_2} - [x]_{x_1}^{x_2} =$$

$$= -\frac{(x_2-x_1)(x_1+x_2)}{2} + x_2\ln 3x_2 - x_1\ln 3x_1 - x_2 + x_1 = -\frac{(x_2-x_1)(x_1+x_2)}{2} + x_2^{\ 2} - x_1^{\ 2} - (x_2 - x_1) =$$

$$= -\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2) + (x_2-x_1)(x_2+x_1) - (x_2-x_1) = \frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2) - (x_2-x_1) =$$

$$= (x_2-x_1)\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1\right) = \frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2).$$

Δ3.

$x_1 < 1 \Rightarrow -x_1 > -1 \Rightarrow 2 - x_1 > 1$

$f(2 - x_1) < 0 \Leftrightarrow f(2 - x_1) < f(x_2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} 2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2$ που ισχύει αφού:

$$E > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0 \overset{x_2 > x_1}{\Rightarrow} x_1 + x_2 > 2$$

Δ4. $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Rightarrow f(x) + \ln 3 - 1 = f'(x_2)(x - x_2) - f(x)$ (1)

- η εφαπτομένη της C_f στο x_2 είναι: $y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Rightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$
- η f είναι κυρτή στο A_f οπότε: $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) \Rightarrow f'(x_2)(x - x_2) - f(x) \leq 0$ **(2)** με το « = » να ισχύει μόνο για $x = x_2$
- η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0=1, οπότε $f(x) \geq f(1)\ \forall x \in A_f \Rightarrow f(x) + \ln 3 - 1 \geq 0$ **(3)** , με το « = » να ισχύει μόνο για x=1

Άρα η (1) είναι αδύνατη από (2) και (3).

Τις απαντήσεις επιμελήθηκαν οι καθηγητές
Νίκος Παπαθανασίου
Σπύρος Σιταρίδης