Πανελλαδικές Εξετάσεις
Ημερησίων & Εσπερινών Γενικών Λυκείων
Τετάρτη: 16 Ιουνίου 2021
Εξεταζόμενο Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού
Απαντήσεις

Θέμα Α

A_1.Σχολικό Βιβλίο σελίδα 135.

A_2.Σχολικό Βιβλίο σελίδα 51.

A_3.Σχολικό Βιβλίο σελίδα 23.

A_4.

1. Σωστό
2. Λάθος
3. Σώστο
4. Σώστο
5. Σωστό

Θέμα Β

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}, x\in\mathbb{R} (1)$

B_1.Έστω ω = x + 1 ⇔x = ω – 1 στην (1):

$$\Rightarrow f(y) = y\cdot e^{1-y}$$

Οπότε $f(x) = x\cdot e^{1-x}, x\in \mathbb{R}$

B_2.Ηfείναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=e^{1-x}(1-x)$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)=0 \overset{e^{1-x}\neq 0}{\Leftrightarrow} 1-x=0\Leftrightarrow x=1$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)>0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x>0\Leftrightarrow x<1$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)<0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x<0\Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	+		–
f(x)	↗		↘

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1, το f(1) = 1.

B3. Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$f''(x) = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} = -e^{1-x}(2-x) = e^{1-x}(x-2)$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \overset{e^{1-x}\neq 0}{\Leftrightarrow} x-2=0 \Leftrightarrow x=2$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) > 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} x-2>0 \Leftrightarrow x>2$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) < 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} x-2<0 \Leftrightarrow x<2$

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
f''(x)	−	+
f(x)	⌒	∪

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $A(2,2e^{-1})$

Η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{1-x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$

Η C_f δεν έχει ούτε οριζόντια ούτε πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\frac{1}{e^{1-x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty} DLH}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$

Η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον άξονα x'x.

B4.

i. Ηf είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty,1]$, οπότε έχουμε

- $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty,1]$

Ηf είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = (1,+\infty)$ οπότε έχουμε

- $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to1^+} f(x), f(1)\right) = (0,1)$

Οπότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty,1]$

ii. $f(x) = \lambda$

- Αν $\lambda > 1$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη, αφού $\lambda \notin f(A_f)$.
- Αν $\lambda = 1$, $1 \in f(\Delta_1)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει ακριβώς (fγν. αύξουσα στο Δ_1) μια λύση.
- Αν $0 < \lambda < 1$, $\lambda \in f(\Delta_1)$και $\lambda \in f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες μια στο Δ_1 και μια στο Δ_2.
- Αν $\lambda < 0$, $\lambda \in f(\Delta_1)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς (fγν. αύξουσα στο Δ_1) μια λύση.

Θέμα Γ

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x^3\text{-}3x^2\text{-}x+1, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0< x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad \alpha < -3$$

Γ1.

- Για x <0: η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
- Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ η f είναι συνεχής ως τριγωνομετρική.
- Για x = 0:

  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu x = 1$

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1\right) = 1$

  f(0) = 1

  Οπότε έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ οπότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο

  $A_f = (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x(\alpha x^2 - 3x - 1)}{x} = -1$

  Οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$, άρα η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. (i)

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.
- Η f παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$
- f(0) = 1
- $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} = 0$

$f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, οπότε δεν ικανοποιείται η τρίτη προϋπόθεση του θεωρήματος Rolle.

(ii) Για κάθε x∈$\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ η f είναι παραγωγίσιμη με: f'(x) = - ημx.

Οπότε θα έχουμε:

f'(ξ) = 0 ⇔ - ημξ = 0 ⇔ ημξ = 0 ⇔ ξ = π, αφού ξ∈ $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.

Γ3. Έστω ότι υπάρχει $x_o\in(-\infty,0)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_o) = 0\Leftrightarrow$

$$3\alpha x_o^2-6x_o-1=0$$

$$\Delta = 36 + 12\alpha = 12(\alpha + 3) < 0, \text{ αφού } \alpha < -3$$

Οπότε δεν υπάρχει $x_o\in(-\infty,0)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o) = 0$, άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη με αρνητική τετμημένη που είναι παράλληλη στον x'x.

Γ4. Για x < 0: $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1 < 0$, αφού Δ < 0 και 3α < 0

Για x ∈$\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$:

- f'(x) = - ημx
- $f'(x)=0\Leftrightarrow -\eta\mu x=0\Leftrightarrow \eta\mu x=0\Leftrightarrow x=\pi$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow -\eta\mu x>0\Leftrightarrow \eta\mu x<0\Leftrightarrow x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow -\eta\mu x<0\Leftrightarrow \eta\mu x>0\Leftrightarrow x\in(0,\pi)$

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
f'	−	−	+	
f	↘	↘	↗	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο (−∞,π], (αφού f συνεχής στο 0) και γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο π οπότε θα ισχύει:

$$f(x)\geq f(\pi)\Leftrightarrow f(x)\geq -1, \text{ για κάθε } x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $\kappa(x)=\ln x-\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$

Η κ είναι συνεχής στο [1,e] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

κ(1) = - 1 < 0

κ(e) = $1-\frac{1}{e}>0$

Οπότε από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση κ(x) = 0⇔ lnx = $\frac{1}{x}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_o στο (1,e).

Η κ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } (0,+\infty)$$

Οπότε η συνάρτηση κ είναι γνησίως αύξουσα στο A_κ, άρα το παραπάνω x_o είναι μοναδικό.

Δ2. $f(x) = (\ln x_o)(x+1) - \ln x - 1$.

Από το ερώτημα Δ1 έχουμε: $\ln x_o = \dfrac{1}{x_o}$ (1)

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη με:

- $f'(x) = \ln x_o - \dfrac{1}{x} \overset{(1)}{=} \dfrac{1}{x_o} - \dfrac{1}{x}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_o} - \dfrac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x} > -\dfrac{1}{x_o} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x_o} \overset{x\cdot x_o>0}{\Leftrightarrow} x > x_o$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_o} - \dfrac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{x_o} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x_o} \overset{x\cdot x_o>0}{\Leftrightarrow} x < x_o$

x	0	x_o $+\infty$
f''(x)	−	+
f(x)	↘	↗

Οπότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_o το

$$f(x_o) = (\ln x_o)(x_o + 1) - \ln x_o - 1 =$$

$$= x_o\ln x_o + \ln x_o - \ln x_o - 1 \overset{(1)}{=} x_o \cdot \frac{1}{x_o} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Δ3. $g(x) = x \cdot e^{-x}$ και $h(x) = \left(\dfrac{x_o}{e}\right)^{x+1}$

Κοινό σημείο:

$g(x) = f(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\dfrac{x_o}{e}\right)^{x+1}$ (2)

- Αν $x \leq 0$ η εξίσωση (2) είναι αδύνατη αφού $\left(\dfrac{x_o}{e}\right)^{x+1} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Αν $x > 0$, έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow \ln\left(x \cdot e^{-x}\right) = \ln\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1)\ln\frac{x_o}{e} \Leftrightarrow$$

$$\ln x - x = (x+1)\left(-1 + \ln x_o\right) \Leftrightarrow \ln x - x = -x + x\ln x_o - 1 + \ln x_o$$

$$\ln x = x\ln x_o - 1 + \ln x_o \Leftrightarrow \ln x = \ln x_o(x+1) - 1 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$x = x_o$$

Αφού η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο x_o και ισχύει: $f(x) \geq f(x_o) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x = x_0$.

Οπότε οι C_g και C_h τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x = x_o$.

Για να αποδείξουμε ότι οι C_g και C_h έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $x = x_o$ αρκεί να δείξουμε ότι:

$$g'(x_o) = h'(x_o)$$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με: $g'(x) = e^{-x}(1 - x)$

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με: $h'(x) = \left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}\ln\frac{x_o}{e} = \left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}\left(-1+\ln x_o\right)$

Οπότε θα έχουμε:

$$g'(x_o)=h'(x_o)\Leftrightarrow e^{-x_o}\left(1-x_o\right)=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}\left(-1+\ln x_o\right)\overset{*(-1)}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{-x_o}\left(x_o-1\right)=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}\left(1-\ln x_o\right)\Leftrightarrow \ln\left[e^{-x_o}\left(x_o-1\right)\right]=\ln\left[\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}\left(1-\ln x_o\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\ln e^{-x_o}+\ln\left(x_o-1\right)=\ln\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}+\ln\left(1-\ln x_o\right)\Leftrightarrow -x_o+\ln\left(x_o-1\right)=(x_o+1)\left(\ln x_o-1\right)+\ln\left(1-\ln x_o\right)\Leftrightarrow$$

$$-x_o+\ln\left(x_o-1\right)=x_o\ln x_o-x_o+\ln x_o-1+\ln\left(1-\ln x_o\right)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\ln(x_o-1)=x_o\cdot\frac{1}{x_o}+\ln x_o-1+\ln\left(1-\frac{1}{x_o}\right)\Leftrightarrow$$

$$\ln(x_o-1)=\ln x_o+\ln\left(\frac{x_o-1}{x_o}\right)\Leftrightarrow \ln(x_o-1)=\ln x_o+\ln\left(x_o-1\right)-\ln x_o\Leftrightarrow 0=0$$

Δ4.

$$(AB) = \sqrt{\left(x-x\right)^2+(f(x)-\varphi(x))^2}=|f(x)-\varphi(x)|=f(x)-\varphi(x), \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ f(x)>\varphi(x)$$

Έστω $d(x) = f(x) - \phi(x)$

- Αν η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο x_o τότε και η d είναι παραγωγίσιμη στο x_o με:

  $$d'(x_o) = f'(x_o) - g'(x_o)$$

  όπου στο εσωτερικό σημείο x_o του παρουσιάζει ελάχιστο, από το Fermat θα ισχύει:

  $G'(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) - \phi'(x_o) = 0 \Leftrightarrow \phi'(x_o) = f'(x_o)$ (1)

  Όμως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o, άρα $f'(x_o) = 0$. Άρα θα έχουμε:

  $$\phi'(x_o) = 0$$

  όπου σημαίνει ότι το x_o είναι κρίσιμο σημείο της ϕ.
- Αν η ϕ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o, τότε το x_o είναι κρίσιμο σημείο της ϕ.

Τις απαντήσεις επιμελήθηκε ο καθηγητής
Νίκος Παπαθανασίου